GEOMETRÍA EUCLÍDEA OLÍMPICA
14/12/18

1. El teorema del Seno

Teorema 1.1. *Sea $\triangle ABC$ con circunradio R, entonces*

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} = 2R$$

Problema 1.2. Demostrar el teorema anterior.

Problema 1.3. Sea $\triangle ABC$ y D un punto en $\overline{BC}$ tal que $\overline{AD}$ es la bisectriz de $\angle BAC$. Demostrar que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$$

2. El teorema de Ceva

Teorema 2.1 (Teorema de Ceva)**.** *Las cevianas $\overline{AX}, \overline{BY}, \overline{CZ}$ de un triángulo ABC se cortan en un punto si y solamente si*

$$\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB} = 1$$

.

Problema 2.2. Demostrar que las cevianas $\overline{AX}, \overline{BY}, \overline{CZ}$ de un triángulo ABC se cortan en un punto si y solamente si

$$\frac{\sin(\angle BAX)\sin(\angle CBY)\sin(\angle ACZ)}{\sin(\angle XAC)\sin(\angle YBA)\sin(\angle ZCB)} = 1$$

Problema 2.3. Sea $\triangle ABC$ un triángulo agudo, sean O y H su circuncentro y ortocentro, respectivamente. Demostrar que existen puntos D, E y F en los lados BC, CA, y AB, respectivamente, tal que

$$OD + DH = OE + EH = OF + FH$$

y los segmentos AD, BE y CF sean concurrentes.

3. Teorema de Menelao

Teorema 3.1 (Menelao)**.** *Sean X, Y, Z punto en las rectas BC, CA, AB de un triángulo ABC. Entonces X, Y, Z son colineares si y solo si:*

$$\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB} = -1$$

Problema 3.2. Sean $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ circunferencias en el plano. Para cada par de circunferencias, consideramos los puntos en el que se cortan las tangentes externas de cada circunferencia. Demostrar que estos tres puntos son colineares.

4. Homotecias

Una homotecia es una dilatación por un factor de escala k, llamado factor de la homotecia, con centro un punto O. Lo importante de las homotecias es que preservan ángulos, tangencias, circunferencias, paralelismo, etc.

Lema 4.1. *Sean ABC y XYZ dos triángulos tal que $\overline{AB} \| \overline{XY}$, $\overline{BC} \| \overline{YZ}$, y $\overline{CA} \| \overline{ZX}$. Entonces las rectas AX, BY y CZ se cortan en O, siendo O el centro de la homotecia que lleva ABC a XYZ.*

Problema 4.2 (Circunferencia de los nueve puntos)**.** Sea ABC un triángulo, O y H su circuncentro y ortocentro, respectivamente. Denotamos por N_9 al punto medio de $\overline{OH}$. Entonces los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$, al igual que los pies de las alturas de ABC, se encuentran en la circunferencia de centro N_9. Además, el radio de la circunferencia es la mitad del radio de (ABC).

Problema 4.3 (Recta de Euler)**.** Demostrar que el ortocentro, el baricentro y el circuncentro (O, G, H) del triángulo ABC son colineares y que $|HG| = 2\,|GO|$.

5. Problemas

Problema 5.1. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico y sean X y Y los ortocentros de $\triangle ABC$ y $\triangle BCD$. Demostrar que $AXYD$ es un paralelogramo.

Problema 5.2. Sea $ABCDE$ un pentagono convexo tal que:

$$\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE \quad \text{and} \quad \angle ABC = \angle ACD = \angle ADE$$

Las diagonales BD y CE se cortan P. Demostrar que la recta AP biseca a $\overline{CD}$.

Problema 5.3. Sean $\overline{AX}, \overline{BY}, \overline{CZ}$ cevianas concurrentes de ABC. Sean $\overline{XD}, \overline{YE}, \overline{ZF}$ cevianas concurrentes de XYZ. Demostrar que las rectas AD, BE, CF son concurrentes.

Problema 5.4. El triángulo agudo ABC está inscrito en la circunferencia ω. Sea H y O su ortocentro y su circuncentro, respectivamente. Sean M y N los puntos medios de los lados AB y AC, respectivamente. Las rectas MH y NH cortan a ω en P y Q, respectivamente. Las rectas MN y PQ se cortan en R. Demostrar que $\overline{OA} \perp \overline{RA}$.

Referencias

[1] Evan Chen: *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads, MAA Press, 2016.*